Applicazione del calcolo differenziale

Funzioni monotòne in un punto

Una funzione *f* si dice *crescente* in un punto *c* del suo dominio se esiste un intorno di *c* tale che, nell'intorno, $x \le c \Rightarrow f(x) \le f(c)$, mentre $x \ge c \Rightarrow f(x) \ge f(c)$.

Ovvia la modifica per il concetto di funzione *decrescente*. Se le disuguaglianze valgono in senso stretto, si parlerà di funzioni *strettamente crescenti* o *strettamente decrescenti*.

A volte, per maggiore sicurezza e considerata la non universalità delle definizioni date, si dice *crescente in senso lato* al posto di *crescente*.

É ovvio che una funzione è crescente in un punto se e solo se il rapporto incrementale relativo al punto è positivo in un intorno opportuno del punto: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$.

Questa osservazione è particolarmente utile per le dimostrazioni che seguiranno.

Occorre prestare molta attenzione alla definizione data di funzione *crescente in un punto*. Spesso si è interessati ad una proprietà molto più raffinata, cioè quella di funzione crescente in un insieme, ovvero di funzione che sale man mano che ci si sposta, nel dominio, da sinistra a destra. Nel caso che qui ci interessa si confronta il valore della funzione in un punto *x*, vicino ad un punto *c*, con il valore che la funzione assume nel punto *c* che è **fissato**; nel caso della crescenza in un insieme si confrontano i valori che la funzione assume in **tutte** le coppie di punti dell'insieme

Per quanto riguarda la crescenza in un punto vale il seguente

Teorema Se la funzione *f* è derivabile in un punto *c* del suo dominio con derivata maggiore di zero, allora la funzione è strettamente crescente nel punto.

La dimostrazione di questo risultato è immediata: se la derivata è maggiore di zero, per il teorema della permanenza del segno il rapporto incrementale sarà maggiore di zero in un intorno di *c*, dal che si deduce la crescenza della funzione.

Si osservi che non è vero il viceversa di questo teorema: la funzione $x \mapsto x^3$ è crescente in 0, ma la sua derivata è nulla. Se però una funzione è crescente in un punto non può avere derivata minore di zero. La modifica per le funzioni decrescenti è immediata.

Massimi e minimi locali (o relativi)

Un punto *c* si dice punto di *massimo locale* o *relativo* per una funzione *f*, se esiste un intorno di *c* dove riesce $f(x) \leq f(c)$, per ogni x. Il punto si dice di *massimo locale stretto* (o *forte* o *proprio*) se $f(x)<f(c)$, ovviamente per $x \neq c$. Analoga definizione per il minimo.

Quando non si vuole distinguere tra massimo o minimo si parla di *estremo* locale.

L'aggettivo *locale* è usato per distinguere questo concetto da quello di minimo o massimo di una funzione nel suo dominio (il minimo o il massimo, se ci sono, dell'insieme immagine); a volte il minimo e il massimo di una funzione nel suo dominio sono chiamati minimo o massimo *assoluti*.

Vale il seguente

Teorema Se la funzione è derivabile in un punto *c*, **interno** al dominio e se la funzione ha in *c* un estremo locale, allora $f'(c)=0$.

Limitandoci al caso del massimo, la dimostrazione è immediata: se $f'(c)$ fosse maggiore di zero, la funzione sarebbe crescente in *c* e quindi, a destra di *c*, avrebbe valori maggiori di $f(c)$. Analogamente si vede che $f'(c)$ non può essere negativa.

Si noti che è fondamentale che il punto *c* sia interno al dominio (in pratica che non coincida con gli estremi dell'intervallo di definizione, visto che ci limitiamo a considerare funzioni definite su intervalli). Se per esempio si considera la funzione $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, situata nel primo e secondo quadrante), agli estremi -1 e 1 si ha un minimo relativo (e anche assoluto), ma la derivata non è affatto nulla.

Si noti altresì che la condizione espressa dal teorema è *solo necessaria*. La funzione $f(x)=x^3$ ha, in zero, derivata nulla senza avere un estremo locale.

Il problema della ricerca dei massimi e minimi di una funzione è della massima importanza nelle applicazioni e occorre avere una idea precisa delle difficoltà connesse, per questo proporremo il seguente metodo.

CONDIZIONE NECESSARIA

Se f(x) è derivabile, affinchè un punto sia di massimo o di minimo locale deve essere: $f'(x)=0$

Dunque si tratterà di risolvere tale equazione per determinare possibili punti di massimo o di minimo locale.

I valori xi che la soddisfano sono solo probabili punti di massimo o minimo locale, in quanto potrebbero anche essere punti di flesso.

I punti in cui si annulla la derivata prima si dicono punti stazionari o punti critici.

Per sapere se questi sono punti di massimo di minimo per la curva si può procedere in 2 modi:

Si studia il segno della derivata prima, studiando la disequazione $f'(x)>0$

Il calcolo della derivata prima serve per determinare gli intervalli in cui la funzione cresce o decresce, facendoci comprendere se i punti trovati sono di massimo o di minimo.

I punti di massimo sono quelli t.c. $f'(x_i)=0$ mentre $f'(x)>0$ a sinistra di xi e $f'(x)<0$ a destra;

I punti di minimo sono quelli t.c. $f'(x_i)=0$ con $f'(x)<0$ a sinistra di xi e ,$f'(x)>0$ a destra.

Invece se la derivata nell'intorno di tali punti non cambia di segno, questi non sono nè di massimo nè di minimo.

CALCOLO DELLE ORDINATE DEGLI EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE

Basta sostituire una alla volta le ascisse dei punti di massimo o di minimo nell'equazione della curva e ricavare l'ordinata.

E' utile riportare con un segno i risultati sul grafico.

OSSERVAZIONI

1) Se si somma una costante alla funzione $y=f(x)$ la funzione $y=f(x)+c$ ha negli stessi punti x i massimi e i minimi assoluti.

2) Se si moltiplica per una costante positiva $y=f(x)$ la funzione $y=cf(x)$ ha negli stessi punti x i massimi e i minimi assoluti.

3) Se $f(x)>0$ per qualsiasi x e consideriamo $y=1/f(x)$ la funzione $y=f(x)$ ha il massimo assoluto dove $y=1/f(x)$ ha il minimo assoluto e viceversa.

4) Se e solo se $f(x)>0$ x si ha che $y=f(x)$ e $y=[f(x)]n$ hanno negli stessi punti x i massimi e i minimi assoluti

Esempio
Vogliamo determinare i punti stremanti della funzione $f(x) = x^2 + 6x$;
calcoliamo la derivata prima
$f'(x) = 2x + 6$
$f'(x) > 0$ $2x + 6 > 0$ da cui x>-3 (funzione crescente);
$f'(x) > 0$ 2x+6<0 da cui x<-3 (funzione decrescente).
Per quanto detto sopra, la funzione ha nel punto x=-3 un minimo relativo.